

Title	線上座標空間ノ弱収斂ト強収斂トガ一致スルタメノ 條件
Author(s)	花井, 七郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(9) p.279-p.282
Issue Date	1948-05-25
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75229">https://doi.org/10.18910/75229</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 95. 線状座標空間ノ弱収斂ト強収斂トガ一致スル タメノ條件

京都工專 花井七郎

(1943. 4. 28)

無限次元一次方程式ノ研究ノタメニ, G. Köthe O. Toeplitz ガ *Journal Math.* 171 (1934) ニテ論ジタ線状座標空間ニ於テ弱収斂ト強収斂トガ一致スル空間ノ例ヲ同論文ニ示シテアルガ. 一致スルタメノ條件ハ求メラレテマナシ. Hilbert 空間ニテ一ツノ点列デ弱収斂ト強収斂トガ一致スルタメノ條件ガ F. Riesz<sup>1)</sup> ノ著書ニアルガ. リノ條件ニ類似ノ物デ, 線状座標空間, 場合ニ條件ヲ求メテ見ル.

隨筆ノタメニ, 定義, 記号等ハ此處デハ述ベナイガ, スベテ上記ノ論文ニ従フコトトスル.

- 〔定理〕 1. 線状座標空間  $\lambda \in \mathcal{P}$  ニ於テ弱収斂ト強収斂トガ一致スルタメノ必要且十分ナル條件ハ次ノ (i), (ii) ガ同時ニ成立スルコトデアル.
- (i)  $\lambda^*$  ノ任意ノ有界 (beschränkt) 集合ニハ,  $\lambda^*$  ノ点ニ弱収斂スル部分列ガ存在スル (即局所弱コンパクトデアル)
  - (ii)  $\lambda, \lambda^*$  ノ任意ノ点列ヲ夫々  $\{p^{(n)}\} \{u^{(n)}\}$  トシ,  $p^{(n)} \rightarrow p^{(0)}$ ,  $u^{(n)} \rightarrow u^{(0)}$  ナルトキ  $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)} p^{(n)} = u^{(0)} p^{(0)}$

〔証明〕 必要ナルコト.

(i) ニツイテ, 若シ有界ナ  $\lambda^*$  ノ点列  $\{u^{(n)}\}$  ガアツテ,  $\lambda^*$  ノ点ニ弱収斂シナイトスル.

然ルトキハ  $\lambda$  ノ一  $p$  ガ存在シテ

$|(\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)})p| \geq m > 0$  (但し  $i, j \in \{n\}$  の部分列  $\{n\}$  = 含まれるトス) ナル如キ一定数  $m$  ガ存在スル。

然ルニ  $p$  ノ系  $p_n$  哉  $p_n$  トレバ、 $\lambda \in \varphi$  ナルヲ以テ  $p_n \rightarrow \tilde{p}$  (弱) デアル。<sup>2)</sup>

故ニ仮定ニヨツテ  $p_n \rightarrow p$  (強)、而シテ

$$0 < m = |(\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)})p| \leq |(\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)})(p - p_n)| + |(\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)})p_n|$$

然ルニ  $\{\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)}\}$  ナル集合ハ有界デアル。 ( $\because \{\tilde{u}^{(n)}\}$  ガ有界)

故ニ任意ノ  $\varepsilon > 0$  ニ對シテ  $n \geq n_0(\varepsilon)$  ナルスベテノ  $n$  ニ對シテ

$$\sup_{i,j} |(\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)})(p - p_n)| \leq \varepsilon$$

ガ成立スル如キ正数  $n_0(\varepsilon)$  ガ存在スル。

今  $n_1 \geq n_0(\varepsilon)$  ナル  $n_1$  ヲ固定シテ、 $\varepsilon, n_1$  ニ對シテ  $N(\varepsilon, n_1) > 0$  ガ定マリ、 $\{n\}$  ノ部分列  $\{n''\}$  ガ存在シテ  $\{n''\}$  = 屬シ且ツ  $N(\varepsilon, n_1)$  ヨリ大ナル  $k, l$  ニ對シテ

$$|(\tilde{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(l)})p_{n_1}| \leq \varepsilon.$$

ガ成立スル。 ( $\because \{\tilde{u}^{(n)}\}$  ガ有界)

$$\text{故ニ} \quad 0 < m \leq |(\tilde{u}^{(k)} - \tilde{u}^{(l)})p| \leq 2\varepsilon.$$

之ハ不合理ナル。

(ii) ニツイテ。

$$|\tilde{u}^{(n)}p^{(n)} - \tilde{u}p| \leq |\tilde{u}^{(n)}(p^{(n)} - p)| + |(\tilde{u}^{(n)} - \tilde{u})p|$$

然ルニ  $\tilde{u}^{(n)} \rightarrow \tilde{u}$  (弱) ナルヲ以テ  $|(\tilde{u}^{(n)} - \tilde{u})p| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

又仮定ニヨツテ  $p^{(n)} \rightarrow p$  (強) 而シテ  $\{\tilde{u}^{(n)}\}$  ハ有界デアル。

$$\therefore \sup_n |\tilde{u}^{(n)}(p^{(n)} - p)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}^{(n)}p^{(n)} = \tilde{u}p.$$

十分ナルコト (i), (ii) ガ成立シタトスル。

今  $\lambda^*$  ノ任意ノ有界集合ヲ  $N$  トスル。  $p^{(n)} \rightarrow p$  (弱) トスレバ、

$\{p^{(n)} - p\}$  ハ有界デアル。<sup>3)</sup>

従ツテ  $\{p^{(n)} - p\}$ ,  $n \geq 1$ ;  $\{p^{(n)} - p\}$ ,  $n \geq 2$ ; ..... ニ對シテ

正数  $r_1, r_2, \dots$  ガ存在シテ<sup>4)</sup>

$$\sup_{\check{u} \in N} |\check{u}(p^{(n)} - p)| \leq r_1, \quad n \geq 1;$$

$$\sup_{\check{u} \in N} |\check{u}(p^{(n)} - p)| \leq r_2, \quad n \geq 2;$$

.....

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq 0$$

今  $p^{(n)} \rightarrow p$  (強) デナイトセヨ. 然ルトキハ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = r > 0.$$

従ツテ  $r > \delta > 0$  ナル  $\delta$  ヲトルトキ

$$\left. \begin{aligned} |\check{u}^{(i)}(p^{(n)} - p)| &> r - \delta, \\ |\check{u}^{(i)}(p^{(n)} - p)| &> r_2 - \delta, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ナル如キ  $\{p^{(n)}\}$  及ビ  $N$ ノ部分列  $\{p^{(n_j)}\}$  及ビ  $\{\check{u}^{(i)}\}$  カ存在スル. 然ルニ  
仮定 (i)ニヨツテ  $\{\check{u}^{(i)}\}$  ノ部分列  $\{\check{u}^{(i_j)}\}$  カ存在シテ.

$$\check{u}^{(i_j)} \rightarrow \check{u}(\check{p}) \quad \check{u} \in \lambda^*$$

今 (i)ニ於テ  $\check{u}^{(i)} =$  対応スル  $\{p^{(n_j)}\}$  ノ部分列ヲ  $\{p^{(n_{j_k})}\}$  トスル.

$$p^{(n_{j_k})} \rightarrow p(\check{p}) \text{ ナル故ニ } p^{(n_{j_k})} \rightarrow p(\check{p})$$

然ルニ

$$0 < r - \delta \leq |\check{u}^{(i)}(p^{(n_{j_k})} - p)| \leq |\check{u}^{(i)} p^{(n_{j_k})} - \check{u} p| + |(\check{u}^{(i)} - \check{u}) p|$$

仮定 (ii)ニヨツテ  $\check{u}^{(i)} p^{(n_{j_k})} \rightarrow \check{u} p (j \rightarrow \infty)$ .

又  $\check{u}^{(i)} p \rightarrow \check{u} p (j \rightarrow \infty)$  之ハ不合理ナル

(証 終)

$\lambda \geq \varphi$  且ツ *normal* デアルトキハ  $\lambda$  デ 定義サレリ弱連続ナ加法的汎函数  $f(p)$   
ハ  $\check{u}_f p$  (但シ  $\check{u}_f \in \lambda$ ) ナル形デ表ハサレルコトハ已知デアルガ. 弱連続ナ加  
法的汎函数ニツイテ又ノ定理ヲ得ル.

[定理] 2. 線状座標空間  $\lambda \geq \varphi$  ガ *normal* トスル.  $\lambda^*$  ハ弱閉弱コンパクト  
トスル.  $\lambda$  ノ任意ノ点  $p$ .  $\lambda^*$  ノ任意ノ点列  $\{\check{u}^{(n)}\} = \check{u}^{(n)} \rightarrow \check{u}(\check{p})$   
 $\check{u} \in \lambda^*$  ナルトキ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{u}^{(n)} p_n = \check{u} p$  (但シ  $p_n$  ハ  $p$  ノ第  $n$  義共) カ成  
立スルトスル.

然ルトキハ  $\lambda$  デ 定義サレタ任意ノ弱連続ナ加法的汎函数  $f(p)$  ニ 対応シテ  $\lambda^*$  ノ

点  $\check{u}_f$  が定まり

$$f(\beta) = \check{u}_f \beta.$$

逆に  $f(\beta) = \check{u}_f \beta$ .  $\check{u}_f \in \lambda^*$  ナルトキハ  $f(\beta)$  ハ強連続ナ加法的汎函数  
デアル.

[証明] 証明ハ Köthe ノ論文<sup>5)</sup> ト同様ニシテ次ノ如クスル.

$$\lambda \ni \varphi \text{ ナルヲ以テ } \beta_n \rightarrow \beta \text{ (弱)}$$

従ツテ [定理] 1 ノ証明ト同様ニシテ

$$\beta_n \rightarrow \beta \text{ (強)}$$

ナルコトガ容易ニ分ル.

$$\text{今 } \beta_n = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \dots + \lambda_n \pi_n \text{ トスル.}$$

$$\text{但シ } \pi_i = (0, \dots, 0, \psi, 0, \dots) \text{ トスル.}$$

$f(\beta)$  ハ強連続ナ加法的汎函数デアルカラ.

$$f(\beta_n) = \lambda_1 f(\pi_1) + \lambda_2 f(\pi_2) + \dots + \lambda_n f(\pi_n)$$

$$\text{且ツ. } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = f(\beta)$$

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f(\pi_i)$$

然ルニ  $\lambda$  ハ *normal* デアルカラ  $\check{u}_f = (f(\pi_1), f(\pi_2), \dots)$  ハ  $\lambda^*$  点デアル.

$$\therefore f(\beta) = \check{u}_f \beta$$

逆ニ  $f(\beta) = \check{u}_f \beta$ ,  $\check{u}_f \in \lambda^*$  ナルトキハ,  $f(\beta)$  ハ強連続デアルコトヨリ,

$\check{u}_f \beta$  ハ強連続デアル.

[証明終]

終リニ臨ミ, 以上述べタコトハ 1947 年 12 月 日本数学会京都支部々会ニテ発表セ  
ルモノデアルコトラ此処ニ附記スル

1). F. Riesz; *Les systemes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues* P. 96.

2) G. Köthe, O. Toeplitz ノ前記論文 P. 198

3). 同上 P. 204

4). 同上 P. 201

5). G. Köthe; *Math. Ann.*, 114 (1937). P. 106